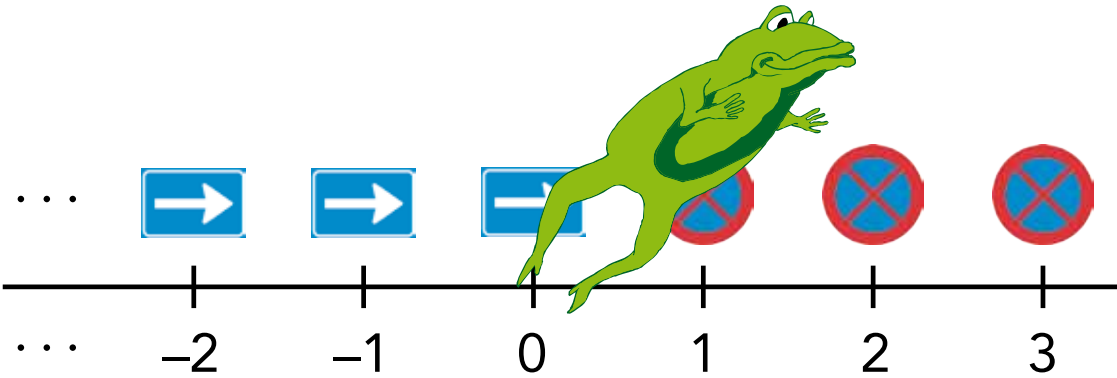
In april vond in Dordrecht de vijfde editie van de Benelux Wiskunde Olympiade plaats. Van de drie gouden medailles die dat weekend vielen, ging er een naar Ragnar Groot Koerkamp (Cambium College Zaltbommel) uit het Nederlandse team. In dit artikel beschrijft hij zijn oplossing van opgave 1.

■ door Ragnar Groot Koerkamp

SPRINGENDE KIKKERS

Opgave 1 (Benelux Wiskunde Olympiade 2013). Zij $n \geq 3$ een geheel getal. Een kikker beweegt al springend over de getallenlijn. Hij start in het punt 0 en maakt n sprongen: één van lengte 1, één van lengte 2, ..., één van lengte n. Hij mag deze n sprongen in willekeurige volgorde uitvoeren. Als de kikker op een gegeven moment op een getal $a \leq 0$ zit, dan moet zijn volgende sprong naar rechts gaan (richting de positieve getallen). Als de kikker op een gegeven moment op een getal $a > 0$ zit, dan moet zijn volgende sprong naar links gaan (richting de negatieve getallen). Bepaal het grootste positieve gehele getal k zodanig dat de kikker zijn sprongen in zo'n volgorde kan uitvoeren dat hij nooit landt op één van de getallen 1, 2, ..., k.



De Benelux Wiskunde Olympiade (BxMO) is het kleine broertje van de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO). Sinds 2009 wordt deze wedstrijd jaarlijks georganiseerd voor middelbare scholieren uit België, Luxemburg en Nederland, met als doel de deelnemers alvast op te warmen voor de internationale olympiade. De winnaar van dit jaar was de zestienjarige Peter Gerlagh van het Theresia Lyceum in Tilburg. Als enige van de dertig topleerlingen uit de Benelux wist hij maar liefst drie van de vier opgaven foutloos op te lossen.

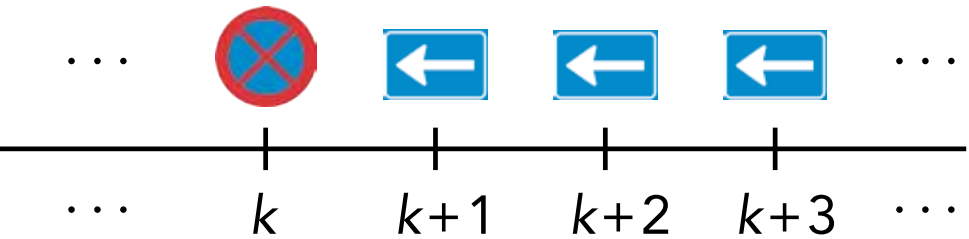
Op de pagina links kun je de eerste opgave van de Benelux Wiskunde Olympiade 2013 lezen. Deze opgave werd bedacht door Merlijn Staps, een Nederlandse oud-deelnemer aan de olympiade die bij zowel de BxMO als de IMO meerdere keren een medaille won.

Om de opgave op te lossen, is het verstandig om eerst een paar kleine gevallen te bekijken. Zo krijg je een beetje gevoel voor de opgave. Omdat $n \geq 3$, beginnen we met $n = 3$. We moeten dan dus in totaal drie sprongen van lengte 1, 2 en 3 maken, waarbij we niet op de getallen 1 tot en met k willen landen. Omdat de eerste sprong wel op 1, 2 of 3 moet landen, is k maximaal 2. Als $k = 2$, dan moet de eerste sprong dus van lengte 3 zijn. Maar je moet dan weer terugspringen met een sprong van lengte 1 of 2, waarbij je noodgedwongen toch landt op 2 of 1. Dus $k = 2$ kan blijkbaar niet. Daarom is k ten hoogste 1. En $k = 1$ kan ook echt, namelijk door eerst naar 3 te springen, dan 1 terug te gaan naar 2 en te eindigen op 0.

Om een idee te krijgen of k bij grotere n groter dan 1 kan zijn, is het handig om nog een paar gevalletjes te proberen. Bij $n = 4$ kom je er na wat puzzelen op uit dat k ook maximaal 1 is en bij $n = 5$ en $n = 6$ is k maximaal 2.

HET ALGEMENE GEVAL Na deze probeersels valt het je misschien op dat het probleem vooral is dat je sprongen van minstens lengte $k + 1$ nodig hebt om over het gat heen te komen, omdat alle sprongen tot en met lengte k er sowieso niet overheen kunnen. We weten ook dat je links van het gat, dus bij de getallen kleiner dan of gelijk aan 0, altijd naar rechts moet springen en dat je rechts van het gat, dus bij de getallen vanaf $k + 1$, altijd naar links moet springen. Dat betekent dat alle sprongen die niet over het gat heen gaan, wel altijd richting het gat gaan. We moeten er dus voor zorgen dat er na de lange sprongen over het gat genoeg ruimte over blijft om ook alle kleine sprongen (van lengte $\leq k$) terug te kunnen maken. Nu gaan we bekijken hoeveel ruimte er hooguit overblijft van de lange sprongen (als die allemaal over het gat heen zouden springen) en hoeveel ruimte we minimaal nodig hebben voor de kleine sprongen (die zeker niet over het gat heen springen).

Als alle sprongen met lengte $k + 1$ of meer over het gat heen gaan, is de ruimte die overblijft na de



sprongen over het gat heen maximaal, terwijl tegelijkertijd de benodigde ruimte voor sprongen niet over het gat heen minimaal is (omdat nu alleen de kleine sprongen niet over het gat heen gaan). We hebben dan hoogstens $n - (k + 1) + 1 = n - k$ sprongen over het gat. Die sprongen hebben lengtes $k + 1, k + 2, k + 3, \ldots, n - 1, n$. Als je bijvoorbeeld vanaf de linkerkant een sprong van lengte $k + 3$ bekijkt, dan land je maximaal op $k + 3$ en vandaar kun je hooguit 2 terugspringen met een kleine sprong (namelijk naar $k + 2$ of $k + 1$).

Na elke grote sprong i naar rechts vanaf de linkerkant kom je hooguit in i en kan je maximaal terug naar $k + 1$. Dus kan je hooguit weer $i - (k + 1)$ terug springen. Hetzelfde geldt voor elke grote sprong i naar links vanaf de rechterkant. Omdat de sprongen allemaal eerst over het gat heen gaan en daarna pas voor extra ruimte zorgen waarin we kunnen terug springen, is de lengte van de extra ruimte hoogstens $0, 1, 2, \ldots, n - (k + 1)$. In totaal is dat dus maximaal

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n - k - 1) = (n - k - 1)(n - k)/2.$$

Nu gaan we kijken naar de totale lengte van alle sprongen die zeker niet over het gat heen gaan. Omdat alle sprongen tot en met lengte k niet over het gat heen kunnen, is die totale lengte minimaal $k(k + 1)/2$.

De lengte die maximaal overblijft na het gat moet groot genoeg zijn voor de minimale lengte van de sprongen die niet over het gat heen gaan, want anders zouden we meer terug moeten springen richting het gat dan dat er ruimte is om dat te doen. Er moet dus gelden dat

$$(n - k - 1)(n - k)/2 \geq k(k + 1)/2.$$

Nu willen we graag weten wat de grootste k is waarvoor dit geldt. Daarvoor gaan we deze ongelijkheid eerst wat herschrijven. We vermenigvuldigen eerst met 2 en werken de haakjes uit:

$$n^2 + k^2 - 2kn - n + k \geq k^2 + k.$$

Nu halen we alles met een k naar rechts:

$$n(n - 1) = n^2 - n \geq 2kn.$$

Omdat n altijd positief is, mogen we nu delen door $2n$, waardoor we vinden dat

$$k \leq (n - 1)/2.$$

Omdat k geheel moet zijn, is k nu maximaal $\lfloor (n - 1)/2 \rfloor$, waarbij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x is.

Nu gaan we laten zien dat we ook echt een reeks sprongen kunnen maken zodanig dat de kikker niet op de getallen 1 tot en met k landt als $k = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$. We willen steeds over het gat heen springen en daarna alle ruimte die we terug kunnen springen tot $k + 1$ benutten. We beginnen met een sprong met lengte $k + 1$. We staan dan al op $k + 1$ en kunnen dus niet nog terug springen. Daarom gaan we weer over het gat heen springen met een sprong met lengte $k + 2$. We eindigen dan op $(k + 1) - (k + 2) = -1$. Nu kunnen we wel terugspringen met een sprong met lengte 1, zodat we op 0 eindigen. Nu nemen we steeds twee sprongen van lengte $k + 1 + i$ en i achter elkaar, zodat we na die twee sprongen altijd op 0 of $k + 1$ eindigen. De eerste grote sprong gaat namelijk altijd over het gat heen, dus van 0 naar $k + 1 + i$ of van $k + 1$ naar $-i$ en de tweede kleine sprong springt dan weer richting het gat, zodat de kikker op $k + 1$ of 0 eindigt. Als we dit doen voor alle i van 1 tot en met k, krijgen we precies de kleine sprongen van 1 tot en met k en de lange sprongen van $k + 1$ tot en met $k + 1 + k = 2k + 1$.

Als n oneven is, geldt dat $2k + 1 = n$. Dan hebben we dus precies alle sprongen van lengte 1 tot en met n gemaakt en zijn we klaar. Als n even is, geldt dat $n = 2k + 2$ en hebben we alleen de sprong met lengte n nog niet gemaakt. Omdat we na een tweetal sprongen altijd op 0 of $k + 1$ eindigen, kunnen we er gewoon nog een sprong van lengte $n = 2k + 2$ achteraan doen zonder dat we in het gat landen.

We hebben nu dus laten zien dat het inderdaad mogelijk is om niet op de getallen 1 tot en met k te landen als $k = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ en dat dat niet kan als k groter is. De maximale k waarvoor de kikker niet in het gat hoeft te landen, is dus $k = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$. ■